Analyse Complexe
TD 8
Fonctions spéciales

Exercice 1 Prouver que toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est le quotient de deux fonctions entières.

Exercice 2 Cet exercice traite de quelques propriétés remarquables de la fonction Γ.

1. Montrer que
$$(\Gamma'/\Gamma)'(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$$
pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$,
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n\geq 1} \frac{(1+1/n)^z}{1+z/n} = \lim_{N\to+\infty} \frac{N^z N!}{z(z+1)\dots(z+N)}.$$
3. A l'aide de la question précédente, montrer que la fonction Γ satisfait les équations
$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/k)\dots\Gamma(z+(k-1)/k) = (2\pi)^{(k-1)/2}k^{1/2-kz}\Gamma(kz),$$
pour tout entier $k \geq 2$.
4. (*) Soit f une fonction holomorphe sur $U = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On suppose que $f(z+1) = zf(z)$ pour tout z, que f est bornée sur la bande $\{z \in \mathbb{C}, 1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2\}$ et que $f(1) = 1$. Montrer que $f = \Gamma$ sur U.
5. A l'aide de la question précédente redémontrer que la fonction Γ satisfait les équations
$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{k})\Gamma(z+\frac{2}{k})\dots\Gamma(z+\frac{k-1}{k}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)}k^{\frac{1}{2}-kz}\Gamma(kz)$$
pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 3 Soit $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. On rappelle que ξ est entière et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle $\xi(1-s) = \xi(s)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction entière f telle que $\xi(s+1/2) = f(s^2)$.
2. Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 0$ et $s \neq 1$,
$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$
où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x. En déduire que la fonction ξ est d'ordre inférieur ou égal à 1.
3. Montrer qu'une fonction entière dont l'ordre est fini et n'est pas entier admet une infinité de zéros.
4. En déduire que la fonction ζ a une infinité de zéros dans la bande $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

Exercice 4

1. (*) On se donne $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels, $q > 0$ entier et $M > 0$. Montrer que l'on peut trouver $t \in [M, Mq^n]$ et des entiers $m_1, \dots, m_n$ tels que pour tout $1 \leq k \leq n$,
$$|ta_k - m_k| \leq \frac{1}{q}.$$

2. Soit $\sigma > 1$. Montrer que pour tout réel t

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq \zeta(\sigma)$$

et que pour tout $\epsilon > 0$, il existe des t arbitrairement grands tels que

$$|\zeta(\sigma + it)| \;\geq (1 - \epsilon)\zeta(\sigma).$$

3. En déduire que pour tout $R > 0$, la fonction ζ n'est pas bornée sur l'ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Im}(s) > R$.

Exercice 5

1. On se donne $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et $M > 0$. Montrer que si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_M^T \left(\prod_{k=1}^n f_k(a_k t) \right) dt = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(t) dt \right).$$

On pourra commencer par traiter le cas des polynômes trigonométriques.

2. On conserve les notations précédentes et on se donne de plus $b_1, \ldots, b_n$ des réels, et $\epsilon > 0$. Montrer l'existence d'un réel $t > M$ et de n entiers $m_1, \ldots, m_n$ tels que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$|ta_k - b_k - 2\pi m_k| < \epsilon.$$

On va appliquer ce résultat à l'étude de $1/\zeta$.

3. Montrer que la fonction $s \mapsto \mathrm{Re}\left(\log(\zeta(s)) - \sum_p p^{-s}\right)$ est bornée sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.
4. (*) On fixe $n \geq 1$ et $M > 0$. Montrer que l'on peut trouver $t > M$, tel que pour tout $\sigma > 1$, l'on ait, si $s = \sigma + it$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_p p^{-s} \right) \leq -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k^{-\sigma} + \sum_{k>n} p_k^{-\sigma}.$$

5. En déduire que quelque soit $M > 0$, $1/\zeta$ n'est pas bornée sur l'ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Im}(s) > M$.

Exercice 6 A l'aide du théorème des nombres premiers, montrer que :

— si p_n désigne le n-ème nombre premier, $p_n \sim n \log n$ quand $n \to +\infty$;
— l'ensemble des rationnels de la forme p/q avec p et q premiers, est dense dans $\mathbb{R}^+$;
— pour toute chaîne finie d'entiers $a_1 \ldots a_n$, avec $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$ pour tout i et $a_1 \neq 0$, il existe un nombre premier dont le développement décimal commence par $a_1 \ldots a_n$.

Exercice 7 Pour tout $T > 0$, on note $N(T)$ le nombre de zéros de ζ dans la bande $0 < \mathrm{Im}(s) \leq T$.

1. (*) Montrer que

$$\int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \sum_{\rho, \xi(\rho)=0} \int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{ds}{s - \rho}$$

et en déduire que

$$(N(T+1) - N(T))\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\left(\int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right).$$

2. On rappelle l'équivalent (Stirling) valable pour s dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ [1] :

$$\log\Gamma(s) = s\log(s) - s + O(\log(|s|)).$$

A l'aide de cet équivalent, prouver que

$$N(T+1) - N(T) = O(\log(T)).$$

1. Prouvez-le pour $s = n$ entier !

3. (*) Redémontrer le résultat de la question précédente, en prouvant que $N(T+1) - N(T) \leq n(\sqrt{5})$, $n(r)$ désignant le nombre de zéros dans le cercle de centre $2 + iT$ de rayon r, puis en utilisant la formule de Jensen. On utiisera librement le fait, vu dans l'exercice 4 du TD 8, question 2, que $\zeta(s) = O(|s|)$ pour $s \geq 1/2$.
   En fait, on sait montrer (et Riemann savait déjà...) que
   $$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$
4. Que peut-on dire asymptotiquement de la multiplicité d'un zéro de la fonction ζ dans le rectangle considéré ?